Groupe orthogonal

I Généralités

$(E, \langle , \rangle)$ est un espace préhilbertien

Déf Une isométrie vectorielle ~~vectorielle~~ de E est une application $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant l'une des deux prop suivantes : ① $\forall x \in E\ \|u(x)\|_2 = \|x\|_2$ ② $\forall x,y \in E\ \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$

D/ ② ⇒ ① $x=y$, ① ⇒ ② formule de polarisation

⚠ Une telle appl est tj injective, mais elle peut ne pas être surjective

Ex : $\left| \begin{array}{l} \ell^2(\mathbb{N}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{N}) \\ (x_n) \longmapsto (0, x_1, x_2, \dots) \end{array} \right.$

Prop : Si E est de dim finie une isométrie vectorielle est bijective

Ex : (lemme) Soit $u \in \mathcal{F}(E)$, tq $u(0)=0$, $\forall (x,y) \in E^2$

$\|u(x)-u(y)\| = \|x-y\|$, Mq : u est linéaire

↳ $\langle u(x), u(y)\rangle = \langle x,y\rangle$ (polarisation)

$\|u(x+y)-u(x)-u(y)\|^2 = \|u(x+y)\|^2 + \|u(x)\|^2 + \|u(y)\|^2 + 2(\langle u(x), u(y)\rangle - \langle u(x+y), u(x)\rangle - \langle u(y), u(x+y)\rangle)$

$= \dots = 0$

Th-Déf : On suppose E DF, Alors l'ensemble $O(E)$ des endo orthogonaux est un sous-groupe de $GL(E)$

D/ Si $u \in O(E)$, $\operatorname{Ker} u = \{0\}$, E étant DF : $u \in GL(E)$; $O(E)$ est inversible, stable par composition, pas $\forall y \in E$ $\|u^{-1}(y)\|_2 = \|u(u^{-1}(y))\|_2 = \|y\|_2$

Ex Soit G un sg fini de $GL(\mathbb{R}^n)$, mq il existe un produit scalaire $\langle , \rangle_G$ tq $\forall g \in G$ soit une isométrie pour $\langle , \rangle$.

S/ Méthode analogue à Maschke. On pose, pour $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$,

$\langle x,y \rangle_G = \sum_{g \in G} \langle gx, gy \rangle$, Soit $h \in G$ il vient $\langle h.x, h.y \rangle_G = \sum_{g \in G} \langle hg.x, hg.y \rangle$

$= \langle x, y \rangle$

Comme $\langle , \rangle_G$ ~~est~~ est bien un produit scalaire, on a gagné

II Actions sur les bases :

$(E, \langle , \rangle)$ est un eve

Th : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Les props suivantes sont équivalentes.

1) $u \in O(E)$

2) Pour tout BON (e_i) de E, $(u(e_i))$ est une ~~base de~~ BON E

3) Il existe une BON $(e_1, \dots, e_n)$ tq $(u(e_1), \dots, u(e_n))$ soit BON dbt.

D/ ① ⇒ ② Soit $(i,j) \in [\![1, n]\!]^2$, il vient $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle$

$(u(e_1), \dots, u(e_n))$ est donc un SON GOKU, or $\dim E$ $\boxed{= \delta_{ij}}$

$= n \dots$ (à compléter...)

Conséquence (HP) : Soient F et G deux sev de E, on a : ~~$\dim F = \dim G$~~

(1) $\dim F = \dim G \Leftrightarrow \exists u \in O(E), u(F) = G$ (2)

justifier l'existence ?

D/ (2) ⇒ (1) clair, (1) ⇒ (2) Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une BON de E tq $(e_1, \dots, e_p)$ soit une base de F

— $(f_1, \dots, f_n)$ ——— $(f_1, \dots, f_p)$ --- de G

On pose $u(e_i) = f_i$, $i = 1 \dots n$

à montrer On montre de même : si $u \in O(E)$, $u(F^\perp) = u(F)^\perp$

RQ : (e_i) BON, $\mathrm{Vect}(e_1, \dots, e_p) = F$, $u \in O(E)$

$u(F) = F$ ($u(F^\perp) = F^\perp$) $\Leftrightarrow [u]_{(e_i)} = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$ $\begin{cases} A \in O_p(\mathbb{R}) \\ B \in O_{n-p}(\mathbb{R}) \end{cases}$

III Symétries orthogonales : (HP sauf déf ?)

Déf : On appelle symétrie orthogonale (vect) toute symétrie s de E tq $\mathrm{Ker}(s-I_E) \perp \mathrm{Ker}(s+I_E)$ (dimensions : $\mathrm{Ker}(s-I)^{\perp} = \mathrm{Ker}(s+I)^{\perp}$)
(rappel CNS $s^2 = I$ (car $K \neq 2$))

Prop $s \in \mathcal{L}(E)$, s est une sym orthogonale $\Leftrightarrow s^2 = I$ et $s \in O(E)$

D/ ($\Rightarrow$) posons $F = \mathrm{Ker}(s-I)$, $G = \mathrm{Ker}(s+I)$; soit $x \in E$: $x = x_F + x_G$

$\|s(x)\|^2 = \|x_F - x_G\|^2 = \|x_F\|^2 + \|x_G\|^2 - 2\langle x_F, x_G\rangle = \|x_F + x_G\|^2$
$= \|x\|^2$

($\Leftarrow$) $s^2 = I$ dit que s est une symétrie vectorielle $\to F, G, \ldots$
si $s(x) = x$ et $s(y) = -y$, il vient $\langle x, y\rangle = \langle s(x), s(y)\rangle = \langle x, -y\rangle$ (hyp)
$x \in F$, $y \in G$

$= -\langle x, y\rangle$

$\langle x, y\rangle = 0$

On parle alors de la symétrie orthogonale // un sev F de E

$F = \mathrm{Ker}(s-I)$, $F^{\perp} = \mathrm{Ker}(s+I)$

Props 1 s est S.O. par rapport au sev $F \Leftrightarrow s = I - 2p$ où p est la P.O. sur $F^{\perp}$

D/ ($\Rightarrow$) On écrit $x = x_F + x_{F^\perp}$; alors $\begin{cases} s(x) = x_F - x_{F^\perp} \\ p(x) = x_{F^\perp} \end{cases} \to s(x) = x - 2p(x)$

($\Leftarrow$) Même calcul.

2) Cas des réflexions : r est une réflexion lorsque $r \in O(E)$ et r est une symétrie hyperplane

i) $\det r = -1$ (on prend une base adaptée)

ii) r réflexion d'hyperplan H, $H^{\perp} = \mathbb{R}a$, $a \in E \setminus \{0\}$

Projection sur $\mathbb{R}a$ $\begin{cases} \pi(x) = \langle x, e_1 \rangle e_1, & e_1 \text{ BON de } \mathbb{R}a \\ \quad " = \dfrac{\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a. & e_1 = \dfrac{a}{\|a\|} \text{ par ex} \end{cases}$

Défi $s(x) = x - \dfrac{2\langle x, a \rangle}{\|a\|^2} a.$

Exercices : (1) Soit s_1 et s_2 deux symétries orthogonales vérifiant $\dim \operatorname{Ker}(s_1 - I) = \dim \operatorname{Ker}(s_2 - I)$

Mq $\exists u \in O(E)$ $s_2 = u \circ s_1 \circ u^{-1}$.

(Ex : Deux réflexions orthogonales sont toujours conjuguées dans $O(E)$)

S/ F_i = $\operatorname{Ker}(s_i - I)$ $i = 1, 2$. Il existe $u \in O(E)$ tq $u(F_1) = F_2$

On regarde $s_2' = u \circ s_1 \circ u^{-1}$ $\begin{cases} s_2' \in O(E) \\ s_2'^2 = u \circ s_1^2 \circ u^{-1} \\ \quad = u \circ I \circ u^{-1} = I \end{cases}$

$s'_2(x) = x \iff u \circ s_1 \circ u^{-1}(x) = x \iff s_1(u^{-1}(x)) = u^{-1}(x)$

$\iff u^{-1}(x) \in \operatorname{Ker}(s_1 - I)$

$\iff x \in u(F_1)$

Aussi $s'_2(x) \iff x \in F_2$ (choix de u) $\longrightarrow s'_2 = s_2$

(2) (I) soit $u \in O(E)$ Mq $\exists p \in \mathbb{N}^*$, $p \leq n$ et des réflexions $s_1, \dots, s_p$ tq $u = s_1 \circ \dots \circ s_p$

D/ Par récurrence sur $n = \dim E$.

$\dim E = 1$: $u = I$ ou $u = -I$
produit $\emptyset$

$\dim E \geq 2$ 1^{er} cas $\exists x \in E \setminus \{0\}$ $u(x) = x$, Pour tout $y \in E$ $\langle x, y \rangle = 0 \iff \langle u(x), u(y) \rangle = 0$

$\iff \langle x, u(y) \rangle = 0$

u laisse stable $H = \{x\}^\perp$, on pose $v = u|_H^H$ $v \in O(H)$

(HR) il existe des réflexions $s_1 ... s_p \in O(H)$ avec $p \leq n-1$

u laisse stable $H = \{x\}^\perp$. On pose $v = u|_H$, $v \in O(H)$, $v = s_p \circ ... \circ s_1$

(HR) il existe des réflexions $s_1, ..., s_p \in O(H)$ avec $p \leq n-1$

tq $v = s_1 \circ ... \circ s_p$; on définit $r_i \left| \begin{array}{l} r_i|_H = s_i \\ r_i(x) = x \end{array} \right.$

r_i est une réflexion // $\mathrm{Ker}(s_i - I) \oplus \mathbb{R}x$ EXPERS

Regardons $u' = r_1 \circ ... \circ r_p$: $\left| \begin{array}{l} u'|_H = s_1 \circ ... \circ s_p \text{ car } H \text{ est stable par } s_i, \ i = 1 ... p \\ \quad \ = u|_H \\ u'(x) = x : u' \text{ fixe } \mathbb{R}x \end{array} \right.$

(CCP) $u' = u$

Projections

2e cas : $\mathrm{Ker}(u - I) = \{0\}$. Soit $a \in E \setminus \{0\}$ $x = u(a) - a \neq 0$

Soit r la réflexion par rapport à $(\mathbb{R}x)^\perp$ il vient

① $r(u(a) - a) = a - u(a)$ ② $\langle u(a) + a | u(a) - a \rangle = \|u(a)\|^2 - \|a\|^2 = 0$

ainsi $r(u(a) + a) = a + u(a)$ $\longrightarrow$ 1 heure $r \circ u = r_1 \circ ... \circ r_p$ $p \leq n-1$

$2 r \circ u(a) = 2a$ $\qquad r \circ r \circ u = r \circ r_1 \circ ... \circ r_p$

③ Soit $\varphi : O(E) \longrightarrow \mathbb{R}^*$, multiplicative Mq $\varphi = 1$ ou $\varphi = \det$

S/ si r est une réflexion, $r^2 = Id$, donc $\varphi(r)^2 = 1$, $\varphi(r) \in \{-1, 1\}$

Supposons $\varphi(r) = 1$. Si s est aussi une réflexion, $r^2 = Id$ donc

$\varphi(r) = \exists u \in O(E)$ (EX 1) $u \circ r \circ u^{-1} = s \Rightarrow \varphi(s) = 1$

par (EX 2) : $\forall v \in O(E)$ $\varphi(v) = 1$

188

2ème cas $\varphi(r) = -1$: pour toute réflexion s, $\varphi(s) = -1$

avec (2) $\varphi(u) = \varphi(r_1 \circ \dots \circ r_p) = \prod_{i=1}^{m} \varphi(r_i) = \prod_{i=1}^{m} \det r_i$

$= \det u$ (tr réflexion $\det r = -1$ à savoir)

IV Matrices orthogonales :

Déf : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On dit que A est orthogonale ${}^tAA = I_n$

$(\Leftrightarrow A \in GL_n(\mathbb{R})$ et ${}^tA = A^{-1})$

* On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble de ces matrices, c'est un sg de $GL_n(\mathbb{R})$
* Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ $(\det A)^2 = 1$ donc $\det A \in \{-1, 1\}$; $SO_n(\mathbb{R}) = \{A \in O_n(\mathbb{R}) \mid \det A = 1\}$ est un sg distingué de $O_n(\mathbb{R})$

Ex Trouver les $A \in O_n(\mathbb{R})$ tq A est à coefficient positifs

S/ ${}^tAA = I$, avec $A = [a_{ij}]_{1 \le i,j \le n}$ il vient si $k \ne l$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}a_{il} = 0$

si $k = l$ $\sum_{i=1}^{n} a_{ik}^2 = 1$.

Supposons que $a_{i_0,k_0} > 0$, il vient pour $l \ne k_0$

$\underbrace{a_{i_0k_0}a_{i_0l}}_{\ge 0} + \underbrace{\sum_{i \ne i_0} a_{ik_0}a_{il}}_{\ge 0} = 0$, alors $a_{i_0l} = 0$ $l \in \{1, \dots, n\} \setminus \{k_0\}$

il y a au plus 1 terme $\ne 0$ par ligne, A inversible, il y a exactement un terme non nul

Ainsi, A est inversible, deux termes > 0 correspondent à des lignes $\ne$, on peut alors poser $k_0 = \sigma(i_0)$ avec σ injective donc bijective.

$$A = \begin{array}{c} \sigma(1) \quad \sigma(n) \\ \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Enfin $\sum_{i=1}^{n} a_{i} k^{i} = 1$ entraine $a_{i\sigma(i)} = 1$, $A = M_{\sigma^{-1}}$

Prop: $(E, \langle , \rangle)$ est un eve : $A \in M_n(\mathbb{R})$

$A \in O_n(\mathbb{R}) \Leftrightarrow$ il existe des BON (e_i) et (f_i) de E tq

$Mat_{(e_i)}(f_i) = A$

D/ On note $A = [C_1, \dots, C_n]$

I) Dans $\mathbb{R}^n$ canonique ${}^tA A = [{}^tC_i C_j]$ $\Big\{ \to$ GRAM SCHMIDT (can)

$\Rightarrow$ On note que $(C_1, \dots, C_n)$ est une base de $\mathbb{R}^n$

On fixe $(e_1, \dots, e_n)$ BON de E : $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$

$\Leftarrow$ $A = [a_{ij}]$ $f_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ $j \in [1, n]$

$\delta_{kj} = \langle f_k, f_j \rangle \underset{(e_i)\ BON}{=} \sum_{i=1}^{n} a_{ik} a_{ij}$ | donc A est orthogonale.

Th : Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes

1) $A \in O_n(\mathbb{R})$

2) ${}^tA A = I_n$

3) $A {}^tA = I_n$

4) Les colonnes de A forment une BON de $\mathbb{R}^n$

5) Les lignes de A forment une BON de $\mathbb{R}^n$

6) $\exists (E, \langle \rangle)$ eve, $u \in O(E)$, (e) bon tq $A = [u]_{(e)}$

7) $f_A \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \\ X \mapsto AX \end{pmatrix}$ est un endo orth de $\mathbb{R}^n$

8) Si $u \in \mathcal{L}(E)$, (e) bon, $[u]_{(e)} = A \Rightarrow u \in O(E)$

D/ 1) $\Rightarrow$ 2) Def, 2) $\Rightarrow$ 3) et 3) $\Rightarrow$ 5) calcul direct 5) $\Rightarrow$ 3) I dem

7) $\Rightarrow$ 6) Clair 1) $\Rightarrow$ 4) $u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $\langle u(e_j), u(e_k) \rangle$

190

$\langle \underbrace{u(e_j), u(e_l)}_{\delta_{lj}} \rangle = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} a_{il} = \langle C_j, C_l \rangle$

le m̂ calcul que 2) ⇒ 8), 8) ⇒ 7) dans $\mathbb{R}^n$.

RM : Si A est orthogonale $[a_{ij}]$ est bistochastique (calcul)

<u>Exo</u> $O_n(\mathbb{R})$ est compact

S/ $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(\{0\})$ où $f(A) = {}^tAA - I_n$: f est C^0

et $\|A\|$ majorée par 1 par sup $|a_{ij}|$

<u>Exo</u> Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$ mq $\left|\sum_{1 \le i,j \le n} A_{ij}\right| \le n$

S/ On note $u = f_A$, $u \in O(\mathbb{R}^n)$, il vient dans la base (e_i)

$\langle u(e_1+e_2+\dots+e_n) | e_1+\dots+e_n \rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} \langle u(e_i), e_j \rangle = \sum_{1 \le i,j \le n} A_{(j,i)}$

et aussi $|\langle u(e_1+\dots+e_n), e_1+\dots+e_n \rangle| \le \|u(e_1+\dots+e_n)\|_2 \|e_1+\dots+e_n\|$

$\le \|e_1+\dots+e_n\|_2^2 = n$

<u>Ex</u> Mq $\mathrm{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = M_n(\mathbb{R})$ → à chercher

B) La réduction

Description de $O_2(\mathbb{R})$

Soit $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R})$, il vient $a^2+b^2=1$, $c^2+d^2=1$

$\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{\perp} = \mathbb{R}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ donc $A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$

$\det \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ $(\det A = a^2+b^2 = 1)$ ou $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$ ($\det A = -1$

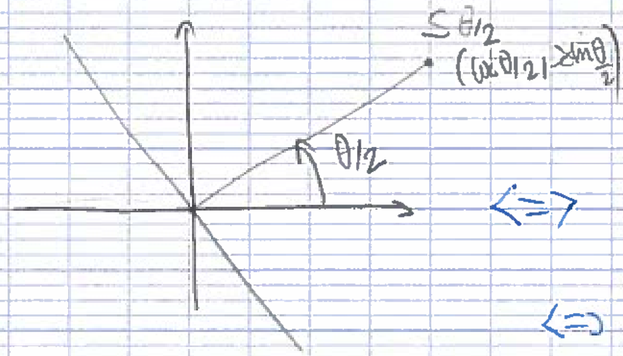
Ecriture : $A\in SO_2(\mathbb{R}) \iff \exists\theta\in\mathbb{R},\ A=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$ $\begin{cases}A^2=I\\ \iff A=I \text{ ou } A=-I\end{cases}$

$A\in O_2(\mathbb{R})\setminus SO_2(\mathbb{R}) \iff A=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}$ $\begin{cases}A^2=I\\ \text{réflexion}\end{cases}$

~~Dans le dernier cas.~~

Dans le dernier cas $A\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix} \iff \begin{cases}(\cos\theta-1)x+\sin\theta\, y=0\\ \sin\theta\, x-(1+\cos\theta)y=0\end{cases}$

$$\iff \begin{cases}-2\sin^2\theta/2+2\sin\theta/2\cos\theta/2\, y=0\\ 2\sin\theta/2\cos\theta/2\, x-2\cos^2\theta/2\, y=0\end{cases}$$



$$\iff \sin\theta/2\, x-\cos\theta/2\, y=0$$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\sin\theta/2\\ -\cos\theta/2\end{pmatrix}=0$$

$$\iff \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\mathbb{R}\begin{pmatrix}\cos\theta/2\\ \sin\theta/2\end{pmatrix}$$

On vérifie $S_{\theta'/2}\circ S_{\theta/2}=r(\theta'-\theta)$

Th $SO_2(\mathbb{R})\to S^1$

$\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\longrightarrow e^{i\theta}$ est un isomorphisme

↳ seul cas où $O_n(\mathbb{R})$ est abélien $\to n=2$.

Réduction générale: $(E,\langle,\rangle)$ est un eve

Th : Soit $u\in O(E)$

1) Si $\lambda\in Spec_{\mathbb{R}}(u)$, $\lambda\in\{-1,1\}$

2) Si F est stable par u, $F^\perp$ aussi

D/ voir Math4.

Groupe orthogonal, suite

D/ 1) Soit x un v p $u(x)=\lambda x$ donc $\|x\|^2 = \|u(x)\|^2 = \lambda^2 \|x\|^2$ donc $\lambda^2 = 1$.
$x \neq 0$ donc $\|x\|^2 > 0$.

2) On note d'abord que $u|_F^F$ est bijectif pour $y \in F^\perp$, $x \in F$
il vient $\langle u(y) | x \rangle = \langle u(y) | u(u^{-1}(x)) \rangle = \langle y | \underbrace{u^{-1}(x)}_{\in F} \rangle = 0$

$u(y) \in F^\perp$

Lemme : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors u possède une droite ou un plan stable

D/ On décompose μ_u en produit d'irréductible $\mu_u = P_1 \dots P_r$
Si l'une des P_i est de degré 1, il y a une direction propre.
Sinon tous les P_i sont de degré 2, $P_1(x) = x^2 + \alpha x + \beta$
$\mathrm{Ker}\, P_1(u) \neq \{0\}$ sinon μ_u n'est pas le polynôme minimal
Soit $x \in \mathrm{Ker}\, P(u)$, $x \neq 0$ il vient $u^2(x) \in \underbrace{\mathrm{Vect}(x, u(x))}_{\text{plan stable par } u}$ ($u(x) \notin \mathbb{R}x$ sinon VP)

Th Soit $u \in \mathcal{O}(E)$, il existe une BON (e) de E tq

$$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & -1 & & & \\ & & & & \ddots & & \\ & & & & & A_1 & \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & A_p \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad A_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix} \quad [\theta_k \not\equiv 0 \ (\pi)]$$

D/ Récurrence sur la dimension : $\dim E \leq 2$: OK
Obs : si $u(x) = x$ et $u(y) = -y$, on a $\langle x | y \rangle = 0$

En effet $\langle \cdots \rangle$ (OK)

$E_{1,u} \perp E_{-1,u}$. On regarde $F = (E_{1,u} \oplus E_{-1,u})^\perp$; F est stable par u et u ne possède aucune vp (réelle) sur F. Avec le lemme $v = u|_F^F$ possède un plan stable P ; v est aussi orthogonal, $P^\perp$ (dans F) est stable par v.

On applique (HR) à v et $P^{\perp}$: il y a une BON $(e)'$ dans laquelle

$$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_p \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix} \quad i = 1 \dots p \Big\} \text{ mes de } \overline{P}^{\perp}$$

On ajoute une bon (e'') de P, $(e'') \cup (e')$ est une BON de F

$$[v] = \begin{pmatrix} A_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_p \end{pmatrix} \to A_i = \begin{pmatrix} \cos\theta_i & -\sin\theta_i \\ \sin\theta_i & \cos\theta_i \end{pmatrix}$$

Puis une BON (e''') de $E_1 \overset{\perp}{\oplus} E_{-1}$ pour avoir

$$[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & A_1 & \\ 0 & & & & & \ddots \; A_p \end{pmatrix}$$

$(e''') \cup (e'') \cup (e')$

Ex Mq $SO_n(\mathbb{R})$ est connexe par arc

Corollaire : Soit $A \in O_n(\mathbb{R})$. Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ tq

$$A = U \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & A_1 & \\ & & & & & \ddots \; A_p \end{pmatrix} {}^tU \qquad A_k = \begin{pmatrix} \cos\theta_k & -\sin\theta_k \\ \sin\theta_k & \cos\theta_k \end{pmatrix}$$

D/ $u = f_A \begin{pmatrix} \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n \\ X \longmapsto AX \end{pmatrix}$ est par hyp orthogonal, il existe donc une BON (e) de $\mathbb{R}^n$ tq $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & & \\ & & -1 & & & \\ & & & -1 & & \\ & & & & A_1 & \\ & & & & & \ddots \; A_k \end{pmatrix}$

si $U = [e]_{(\varepsilon)}$, $U \in O_n(\mathbb{R})$, $U^{-1}AU = B$

$A = UBU^{-1} = UB{}^tU$

Preuve de la connexité de $SO_n(\mathbb{R})$: Soit $A \in SO_n(\mathbb{R})$

$$A = U \begin{pmatrix} \overbrace{-1 \ \ddots \ -1}^{\alpha} & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_p \end{pmatrix} U^{-1} \qquad \det A = 1 = (-1)^{\alpha} \quad \alpha \text{ est pair } = 2\beta$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & \cos\pi \end{pmatrix}$$

$$A = U \begin{pmatrix} \begin{matrix} \cos\pi & -\sin\pi \\ \sin\pi & -\cos\pi \end{matrix} & & & & & 0 \\ & \ddots & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & \ddots \ 1 & & \\ & & & & \begin{matrix} \cos\theta_1 & -\sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{matrix} & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & & & & & \begin{matrix} \cos\theta_p & -\sin\theta_p \\ \sin\theta_p & \cos\theta_p \end{matrix} \end{pmatrix} U^{-1}$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos t\pi & -\sin t\pi \\ \sin t\pi & \cos t\pi \end{pmatrix} & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots \ 1 & \\ & & & \begin{pmatrix} \cos t\theta_k & -\sin t\theta_k \\ \sin t\theta_k & \cos t\theta_k \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Alors $\left| \begin{array}{l} A(1) = A \\ A(0) = U I_n U^{-1} = I_n \\ \forall t \in [0,1],\ A(t) \in O_n(\mathbb{R}) \text{ et } \det A(t) = 1 \end{array} \right.$

A est un arc continu dans $SO_n(\mathbb{R})$ qui joint I_n à A.

Ex : Soit G un sg fini de $SL_2(\mathbb{R})$. Mq G est cyclique

S/ sur $\mathbb{R}^2$ $\langle x,y\rangle_G = \sum_{g\in G} \langle gx, gy\rangle$ est un ps scalaire

tq $G \subset O(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle_G)$

$\left(\langle x,y\rangle_G = \sum_{A\in G} {}^t(AX)AY = \sum_{A\in G} {}^t\cancel{X}\,{}^tA A \cancel{X} = {}^tXP\cancel{X} \right.$ où

$P = \sum_{A\in G} {}^tAA$, si $B \in G$ $\langle BX, BY\rangle_G = \langle X,Y\rangle_G$ ie

Rq → $\left[\begin{array}{l} {}^tX\,{}^tBPBY = {}^tXPX, \quad {}^tX\,{}^tB\sqrt{P}\sqrt{P}BY = {}^tX\sqrt{P}\sqrt{P}\,{}^tY \\ \qquad \sqrt{P}\,{}^tB\sqrt{P} \in O_2(\mathbb{R}) \end{array} \right]$

Mais aussi $G \subset SL_2(\mathbb{R})$, donc $G \subset SL_2(\mathbb{R})$

donc $G < SO_2(\mathbb{R}^2, \langle , \rangle) \simeq S^1$

un sg fini de S^1 est cyclique

<u>RM</u> : Si (e) est une BON de l'ev E $\left(\begin{array}{l} SO(E) \longrightarrow SO(\mathbb{R}) \\ u \longmapsto [u]_{(e)} \end{array} \right)$

est un isomorphisme

C) Description de $S_3(\mathbb{R})$

<u>Th</u> : Soit $u \in SO_3(\mathbb{R})$, il existe une (bon) (e) de (E) tq $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

2) Si $u \neq I$, $E_{1,u}$ est de dimension 1

3) $u^2 = I$ et $u \neq I \iff \exists (e)$ BON $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

D/ La dimension est impaire, il y a un vecteur propre e_1

i) $u(e_1) = e_1$ $(e_1)^\perp$ est un plan stable $[u]_{\underbrace{(e_1, e_2, e_3)}_{\text{BON dep}}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

ii) $u(e_1) = -e_1$ $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & & \\ 0 & & B \end{pmatrix}$, $B \in O_2(\mathbb{R})$, $\det B = -1$

B est une reflexion

On déduit que B en BON $[u]_{(e)} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ } symétrie droite retournement

* On trouve si $\det u = -1$ $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ $\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\text{réflexion}}$ $\begin{pmatrix} -1 & & \\ & -1 & \\ & & -1 \end{pmatrix}$

<u>Prop</u> : $SO_3(\mathbb{R})$ est engendré par les retournements

D/ $u = \underbrace{s_1 \circ s_2}_{\text{réflexions}} = \underbrace{(-s_1) \circ (-s_2)}_{\text{retournements}}$

Voc Si $u \in SO_3(E) \setminus \{I\}$ la droite $\mathbb{R} e_1$ s'appelle l'axe

NB $\mathrm{Tr}(u) = 1 + 2\cos\theta$

Ex Soit $G \subset SL_3(\mathbb{Z})$, fini, ordres possibles pour $A \in G$?

S/ Il existe un produit scalaire $\langle , \rangle_G$ tq $G \subset \underbrace{SO_3(\mathbb{R}^3, \langle , \rangle_G)}_{\simeq SO_3(\mathbb{R})}$

si $A \in G$, A semblable à $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

$\Rightarrow 1 + 2\cos\theta = \mathrm{Tr} A \in \mathbb{Z} \,|\, \cos\theta \in \{1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, -1\}$.

↳ ordres $\{1, 2, 3, 4, 6\}$.